Nota : le mot famille a ici toujours le sens de famille finie.

AFFINE (APPLICATION)

Une application f d'un espace affine E vers un espace affine F est dite affine s'il existe une application linéaire $\overrightarrow{f}$ de $\overrightarrow{E}$ vers $\overrightarrow{F}$ telle que $\forall A, B \in E \ \ \overrightarrow{f(A)f(B)} = \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{AB}\right)$.

Cette condition est équivalente à : $\exists O \in E \ \ \forall M \in E \ \ f(M) = f(O) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM})$ et cette propriété est alors vraie pour tout point O.

L'application linéaire $\overrightarrow{f}$ est unique et s'appelle la partie linéaire de f.

On a la propriété : $\overrightarrow{g \circ f} = \overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f}$.

Deux applications affines f et g de E vers F ont même partie linéaire ssi il existe une translation t de F telle que $g = t \circ f$ (idem avec $g = f \circ t$).

Une application est affine si et seulement si :

1) elle conserve les barycentres (i. e. $f(\text{bar}((A_i, \alpha_i)) = \text{bar}((f(A_i), \alpha_i))$.

2) elle conserve les barycentres de deux points.

3) elle conserve l'alignement (si $\dim(E) \geqslant 2$) (théorème fondamental de la géométrie affine).

4) elle est continue et conserve les milieux (ou les parallélogrammes).

AFFINE (ESPACE)

Un espace affine, associé à un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\overrightarrow{E}$, est un ensemble E muni d'une application $\begin{cases} \overrightarrow{E}^2 & \to \overrightarrow{E} \\ (A, B) & \longmapsto \overrightarrow{AB} \end{cases}$ vérifiant :

1) Relation de Chasles : $\forall \ A, B, C \in E \ \ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

2) $\forall \ A \in E \ \ \forall \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E} \ \ \exists \, ! B \in E \ \ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$; le point B est noté $A + \overrightarrow{u}$.

En général, on prend $E = \overrightarrow{E}$ avec $\overrightarrow{AB} = B - A$.

AFFINE (GROUPE)

Sous-groupe de $Bij(E)$ formé des transformations affines de E ; notation : $GA(E)$.

AFFINE (PROPRIETE)

Qui est conserve par une application affine.

Exemples : le parallélisme, l'ordre des points sur une droite etc.

AFFINE (Repère)

Voir repère..

AFFINE (SOUS-ESPACE)

Voir à sous-espace affine.

AFFINEMENT LIBRE (FAMILLE)

AFFINEMENT INDEPENDANTS (POINTS)

Voir à libre.

AFFINITE (AFFINE!)

F étant un sous-espace affine de E et $\vec{G}$ un supplémentaire de $\vec{F}$ dans $\vec{E}$, O un point de F, l'affinité de base F, de direction $\vec{G}$, de rapport a est l'unique endomorphisme affine dont les restrictions à F et $G = O + \vec{G}$ sont respectivement l'identité et l'homothétie de centre O et de rapport a.

ALIGNES (POINTS)

Situés sur une même droite (affine).

ANTIDEPLACEMENT

Isométrie affine indirecte.

Dans le plan, ce sont les réflexions glissées, en dimension 3, les réflexions glissées et les réflexions-rotations.

AUTOMORPHISME AFFINE

Application affine bijective d'un espace affine dans lui-même.

Synonyme : transformation affine.

BARYCENTRE D'UNE FAMILLE DE POINTS PONDERES
Le barycentre de la famille ((A $_i$, α_i)) (vérifiant $\alpha = \sum \alpha_i \neq 0$) est l'unique point G noté bar$((A_i, \alpha_i))$ vérifiant : $\sum \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}$.
Il vérifie pour tout point O de E : $\alpha\overrightarrow{OG} = \sum \alpha_i \overrightarrow{OA_i}$.

BIPOINT
Couple de points.

CARTESIEN (REPERE)
Voir à repère.

CONCOURANTES (DROITES)
Passant par un même point.

CONVEXE
Un convexe (ou une partie convexe) C d'un espace affine est une partie telle que tout segment joignant deux points de C est inclus dans C.
CNS : stabilité par barycentres positifs, par barycentres positifs de deux points.

COORDONNEES
Les coordonnes cartésiennes d'un point M dans un repère cartésien (O, B) sont les coordonnes de $\overrightarrow{OM}$ dans B.
Les coordonnées barycentriques d'un point M dans un repère affine $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n+1}$ sont les $(\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n+1}$ (uniques à une constante multiplicative près) tels que M soit le barycentre des $((A_i, \alpha_i))_{1 \leqslant i \leqslant n+1}$.

COPLANAIRES (POINTS, DROITES)
Situé(e)s dans un même plan.

COTE (D'UN POLYGONE)
Voir à polygone.

DEMI TOUR
Synonyme de retournement.

DEPENDANTS (POINTS AFFINEMENT/)
Contraire d'indépendants.

DEPLACEMENT
Isométrie affine directe.
Dans le plan, ce sont les rotations et les translations, en dimension trois, les vissages.
L'ensemble des déplacements d'un espace affine euclidien E est un groupe, appelé groupe des déplacements de E et noté $Dep(E)$.

DIAGONALE D'UN POLYGONE
Segment joignant deux points non consécutifs.

DIMENSION D'UN ESPACE AFFINE
Celle de sa direction.

DIRECTEURS (VECTEURS / D'UN SOUS-ESPACE AFFINE)
Eléments d'une base de la direction.

DIRECT
Un repère cartésien est dit direct s'il est associé à une base directe.
Un endomorphisme affine est dit direct si sa partie linéaire est directe.

DIRECTION D'UN SOUS-ESPACE AFFINE

Ensemble des vecteurs joignant deux points de ce sous-espace.
Pour l'espace affine entier, c'est l'espace vectoriel associé.
Voir à sous-espace affine.

ENDOMORPHISME AFFINE
Application affine d'un espace affine dans lui-même.

ENGENDRE PAR UNE FAMILLE DE POINTS (CONVEXE)
Synonyme d'enveloppe convexe.

ENGENDRE PAR UNE FAMILLE DE POINTS (SOUS-ESPACE AFFINE /)
Le sous espace affine engendré par $(A_1, A_2, ..., A_p)$, noté $\mathrm{Aff}(A_1, A_2, ..., A_p)$ est le plus petit sous-espace affine contenant tous ces points. C'est aussi l'ensemble des barycentres de ces points. Sa direction est $\mathrm{Vect}((\overrightarrow{A_iA_j})_{j\in[1,p]\setminus\{i\}})$ (qui ne dépend pas de i).

ENVELOPPE CONVEXE D'UNE FAMILLE DE POINTS , D'UNE PARTIE FINIE.
L'enveloppe convexe de $(A_1, A_2, ..., A_p)$ ou de $\{A_1, A_2, ..., A_p\}$, notée $\mathrm{Conv}(A_1, A_2, ..., A_p)$ est le plus petit convexe contenant tous ces points. C'est aussi l'ensemble des barycentres positifs de ces points.

EQUIBARYCENTRE
Mauvais synonyme d'isobarycentre (mélange de latin et de grec).

EQUIPOLLENTS (BIPOINTS)
(A, B) et (C, D) sont dits équipollents si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
CNS : milieu(A, D) =milieu(B, C) .

EUCLIDE (THEOREMES D'EUCLIDE)
1) Par $p+1$ points affinement indépendants passe un et un seul sous espace affine de dimension p (le sous-espace engendré par ces points).
2) Par un point donné passe un et un seul sous-espace affine de direction donnée.

EUCLIDIEN (ESPACE AFFINE)
Associé à un espace vectoriel euclidien. On le munit automatiquement de la distance euclidienne : $d(A, B) = AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$.

FIXE (POINT / D'UN ENDOMORPHISME AFFINE)
Egal à son image ; synonyme d'invariant.
L'ensemble des points fixes de f est un sous-espace affine de direction $\mathrm{Ker}\left(\overrightarrow{f} - id_{\overrightarrow{E}}\right)$ s'il est non vide (et cette dernière condition est assurée en dimension finie si $\mathrm{Ker}\left(\overrightarrow{f} - id_{\overrightarrow{E}}\right) = \{\overrightarrow{0}\}$).

GENERATRICE
Une famille de points est dite génératrice si elle engendre l'espace entier.

GLISSEE (SYMETRIE, REFLEXION)
Composée commutative d'une symétrie, d'une réflexion et d'une translation dont le vecteur appartient à la direction de la symétrie.

GRAVITE (CENTRE DE / D'UNE FAMILLE DE POINTS)
Leur isobarycentre.

HOMOTHETIE (AFFINE)
Une homothétie (affine) est une application affine h associe à une homothétie vectorielle $\overrightarrow{h}$ (dont le rapport est aussi celui de h) et ayant au moins un point fixe (appel centre de h).
Autrement dit : $\exists\lambda \in \mathbb{R}\ \exists\Omega \in E\ \forall M \in E \quad h(M) = \Omega + \lambda\overrightarrow{\Omega M}$.
Une application affine associée à une homothétie vectorielle de rapport -1 est une homothétie affine et son centre est unique.

Les application affines laissant globalement invariante toute droite passant par Ω sont les homothéties de centre Ω de rapport $\neq 0$.

HOMOTHETIES- TRANSLATIONS (GROUPE DES)

Sous-groupe de $GA(E)$ formé des application affines dont la partie linéaire est une homothétie vectorielle de rapport $\neq 0$, autrement dit des homothéties de rapport $\neq 0$ et des translations.

Elles conservent la direction des sous-espaces de E et sont caractérisées par le fait qu'elles sont affines et conservent la direction des droites de E.

Notation de ce groupe : $HT(E)$.

HYPERPLAN AFFINE

De direction un hyperplan vectoriel.

INDEPENDANTS (POINTS AFFINEMENT /)

Voir à libre.

INVARIANT (POINT / D'UN ENDOMORPHISME AFFINE)

Egal à son image ; synonyme de fixe.

INVARIANTE (PARTIE GLOBALEMENT / INVARIANTE PAR UN ENDOMORPHISME AFFINE)

Egale à son image. Son isobarycentre (s'il existe) est alors invariant.

L'ensemble des automorphismes affines laissant globalement une partie de E est un sous groupe de $GA(E)$.

INVARIANTE (PARTIE / INVARIANTE POINT PAR POINT PAR UN ENDOMORPHISME AFFINE)

Dont tous les points sont invariants.

ISOBARYCENTRE

Barycentre à coefficients égaux (non nuls). On peut parler d'isobarycentre d'une famille, ou d'une partie finie. On peut étendre la notion à une partie mesurable bornée.

ISOMETRIE (AFFINE) D'UN ESPACE EUCLIDIEN

Application conservant les distances.

Autrement dit : $\forall A, B \in E \quad A'B' = AB$ (où $A' = f(A)$ et $B' = f(B)$)

CNS : application affine de partie linéaire une isométrie vectorielle.

ISOMORPHISME AFFINE

Application affine bijective.

LEIBNIZ (FONCTION SCALAIRE DE)

La fonction scalaire de Leibniz associe à une famille de points pondérés (A_i, α_i) d'un espace affine E est la fonction f de E dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall M \in E \quad f(M) = \sum\limits_i \alpha_i MA_i^2$ ($f(M)$ est donc le moment d'inertie des (A_i, α_i) par rapport à M) .

Relations scalaires de Leibniz :

1) $f(N) = f(M) + \alpha MN^2 - \overrightarrow{MN}\ \vec{f}(M)$, où $\alpha = \sum\limits_i \alpha_i$.

d'où $f(M) = f(G) + \alpha MG^2$, si $G = \text{bar}((A_i, \alpha_i))$, $\alpha \neq 0$.

2) $\sum\limits_{i \leq j} \alpha_i \alpha_j (A_i A_j)^2 = \alpha f(M) - 2\left(\vec{f}(M)\right)^2$, d'où $\alpha f(G) = \sum\limits_{i \leq j} \alpha_i \alpha_j (A_i A_j)^2$.

LEIBNIZ (FONCTION VECTORIELLE DE)

La fonction vectorielle de Leibniz associée à une famille de points pondérés (A_i, α_i) d'un espace affine E est la fonction $\vec{f}$ de E dans $\vec{E}$ définie par :

$\forall M \in E \quad \vec{f}(M) = \sum\limits_i \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$.

Relation vectorielle de Leibniz :

$\vec{f}(N) = \vec{f}(M) - \alpha\overrightarrow{MN}$

d'où $\vec{f}(M) = \alpha\overrightarrow{MG}$, si $G = \text{bar}((A_i, \alpha_i))$.

LIBRE (FAMILLE AFFINEMENT/)

Une famille de points $(A_1, A_2, ..., A_p)$ est dite (affinement) libre (ou les points sont dits (affinement) indépendants) lorsqu'aucun des points de cette famille n'appartient au sous-espace engendré par les autres.

CNS 1 : $\forall i \ \left(\overrightarrow{A_iA_j}\right)_{j\in[1,p] \setminus \{i\}}$ est libre.

CNS 2 : $\exists\ i \ \left(\overrightarrow{A_iA_j}\right)_{j\in[1,p] \setminus \{i\}}$ est libre.

CNS 3 : $\dim(\text{Aff}(A_1, A_2, ..., A_p)) = p - 1$.

LIE

Contraire de libre.

LINEAIRE (PARTIE / D'UNE APPLICATION AFFINE)

Voir à affine (application).

MATRICE COMPLETE D'UNE APPLICATION AFFINE

Soit $R = (O, B)$ et $R' = (O, B')$ des repères respectifs de E et F.

La matrice complète d'une application affine f de E vers F dans R et R' est la matrice forme de la matrice de $\overrightarrow{f}$ dans les bases B et B' bordée à droite par la matrice unicolonne des coordonnées de $f(O)$ dans R'.

MILIEU DE DEUX POINTS (D'UN BIPOINT)

Isobarycentre.

ORTHOGONAL

Deux sous-espaces affines d'un espace euclidien sont dits orthogonaux lorsque leurs directions le sont.

L'orthogonal d'un sous-espace affine est l'orthogonal de sa direction (c'est donc un sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{E}$).

PARALLELE

Deux sous-espaces affines sont dits parallèles (au sens fort) lorsqu'ils ont la même direction (autrement dit lorsqu'ils sont image l'un de l'autre par une translation).

Ils sont dits parallèles au sens faible lorsque la direction de l'un est incluse dans la direction de l'autre.

PARALLELOGRAMME

Quadrilatère ABCD vérifiant $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ (ou $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$) ;

CNS : (A, C) et (B, D) ont même milieu.

PERPENDICULAIRE

Deux sous-espaces affines sont dits perpendiculaires si leurs orthogonaux sont orthogonaux.

CNS : la direction de l'un contient l'orthogonal de l'autre.

Deux sous-espaces à la fois perpendiculaires et orthogonaux sont supplémentaores

PLAN (AFFINE)

Espace affine de dimension 2.

POINT

Nom des éléments d'un espace affine, et aussi, par abus, d'un espace affine de dimension nulle (réduit à un point).

POLYGONE

Famille finie $(A_1, A_2, ..., A_p)$ de points coplanaires.

Les sommets en sont les A_i ; deux sommets A_i et A_j sont dits consécutifs si $|j - i| = 1$ ou $\{i, j\} = \{1, n\}$.

Les côtés sont les segments joignant deux sommets consécutifs.

Les diagonales sont les segments joignant deux sommets non consécutifs..

PONDERE (POINT)

Couple formé d'un point et d'un réel appelé coefficient du point.

POSITIF (BARYCENTRE)

Barycentre à coefficients positifs ou nuls.

PROJECTION (AFFINE)

Affinité de rapport nul.

La projection de base F et de direction $\overrightarrow{G}$ (avec $\overrightarrow{F} \oplus \overrightarrow{G} = E$) fait correspondre à tout point M de E le point d'intersection de F avec le sous-espace de direction $\overrightarrow{G}$ passant par M.

CNS 1 : endomorphisme affine de carré égal à lui-même.

CNS 2 : endomorphisme affine dont la partie linéaire est une projection vectorielle, ayant au moins un point fixe.

QUADRILATERE

Polygone à quatre sommets. Notation simplifiée : ABCD.

RANG D'UNE APPLICATION AFFINE

Celui de sa partie linéaire..

REFLEXION

Symétrie orthogonale de base un hyperplan.

REPERE AFFINE

Famille libre et génératrice. Elle possède $\dim(E) + 1$ éléments.

Tout point y possède une famille de coordonnées barycentriques, unique à une constante multiplicative près.

REPERE CARTESIEN

Couple formé d'un point (appelé origine) et d'une base de l'espace vectoriel associé.

RETOURNEMENT

Symétrie orthogonale par rapport à une droite en dimension 3 ; c'est une rotation d'angle π.

ROTATION (AFFINE)

Déplacement ayant au moins un point fixe en dimension 2 ou 3.

Elle est définie par un centre et un angle en dimension 2, un axe orienté et un angle en dimension 3.

ROTATION-REFLEXION (AFFINE)

Antidéplacement en dimension 3.

Elle est définie par un axe orienté, un plan et un angle .

SEGMENT

Le segment joignant A et B (ou d'extrémités A et B) est l'ensemble des barycentres positifs de A et B ; c'est l'enveloppe convexe de $\{A, B\}$.

Notation $[A, B] = \{\text{bar}\left((A, t), (B, 1-t)\right) \ / \ t \in [0, 1]\}$.

SECANTS (SOUS-ESPACES AFFINES)

Dont l'intersection est non vide.

SIMILITUDE AFFINE (D'UN ESPACE AFFINE EUCLIDIEN)

Application multipliant les distances par une constante non nulle.

Autrement dit : $\exists k \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall A, B \in E \quad A'B' = kAB$.

Le nombre k (unique) est le rapport de la similitude.

CNS :

- application affine de partie linéaire une similitude vectorielle.
- composée d'une isométrie affine et d'une homothétie affine.
- transformation affine conservant l'orthogonalité des droites

Une similitude qui n'est pas une isométrie possède au moins un point fixe.

Dans le plan les similitudes directes peuvent être définies en complexes par $z \mapsto az + b$ et les similitudes indirectes par $z \mapsto a\overline{z} + b, \ a \neq 0$.

SOMMET D'UN POLYGONE

Voir à polygone.

SOUS-ESPACE AFFINE

Une partie F d'un espace affine E est un sous-espace affine de E si l'ensemble des vecteurs joignant un point fixé de F à tout point de F est un sous-espace vectoriel $\overrightarrow{F}$ de $\overrightarrow{E}$; $\overrightarrow{F}$ est appelé la direction de F et l'on a $F = O + \overrightarrow{F}$ pour tout point O de F.

CNS 1 : F est stable par barycentres.
CNS 2 : toute droite joignant deux points de F est incluse dans F.

STABLE (PARTIE / PAR UN ENDOMORPHISME AFFINE)
Incluse dans son image.
Une partie finie ou un sous-espace affine stable par un automorphisme affine est globalement invariant par cet automorphisme.

SUPPLEMENTAIRES (SOUS-ESPACES AFFINES)
Dont les directions sont supplémentaires (dans l'espace vectoriel associé).
Ils se coupent en un point unique.

SYMETRIE (AFFINE)
Affinité de rapport -1.
CNS 1 : involution affine
CNS 2 : application affine possédant un point fixe dont la partie linéaire est une symétrie vectorielle.

SYMETRIE CENTRALE (ou SYMETRIE POINT)
Homothétie de rapport -1.
Caractérisation : Application affine de partie linéaire $-id_E$.

TRANSFORMATION AFFINE
Application affine bijective d'un espace affine dans lui-même.
Synonyme : automorphisme affine.

TRANSLATION
Une translation t de E est une application affine de E dans E de partie linéaire l'identité.
Il existe alors un unique vecteur $\overrightarrow{u}$, appelé le vecteur de t, tel que $t(M) = M + \overrightarrow{u}$.

TRIANGLE
Polygone à trois sommets.

TRIANGULAIRE (COURBE)
Réunion des côtés d'un triangle.
Son centre de gravité est le centre du cercle inscrit.

TRIANGULAIRE (PLAQUE)
Enveloppe convexe d'un triangle.
Si elle est homogène, elle a même centre de gravité que le triangle.

VISSAGE
Déplacement en dimension 3. Il est défini par un axe orienté par un vecteur $\vec{n}$, un angle θ et un vecteur de translation $\vec{u}$. Il est dit propre lorsque ce n'est ni une rotation ni une translation, c'est-à-dire lorsque θ et $\vec{u}$ sont non nuls.